



TITLE:

# Character Products of Association Schemes (Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics)

AUTHOR(S):

花木, 章秀

---

CITATION:

花木, 章秀. Character Products of Association Schemes (Cohomology Theory of Finite Groups and Related Topics). 数理解析研究所講究録 2004, 1357: 104-107

ISSUE DATE:

2004-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/25208>

RIGHT:

# Character Products of Association Schemes

信州大学・理学部 花木 章秀 (Akihide Hanaki)

Department of Mathematical Sciences,

Faculty of Science, Shinshu University

アソシエーションスキームは代数的組合せ論の主要な研究対象であるが、その一般論については、まだそれほど多くのことは分かっていない。ここでは有限群の指標理論をまねて、その指標の積を考える。有限群の群環は Hopf 代数なので、その指標の積は常に指標になる。しかしアソシエーションスキームの隣接代数は一般に Hopf 代数ではないので、その指標の積は指標になるとは限らない。ここでは、考える指標の一方が本質的に有限群の指標である場合には、その積がまた指標になることを示す。

## 1 記号と定義

記号は Zieschang [3] のものを用いる。

$X$  を有限集合とする。 $g \in X \times X$  に対して、その隣接行列  $\sigma_g$  とは、行、列共に  $X$  で添字の付けられた正方行列で、その  $(x, y)$ -成分は  $(x, y) \in g$  のとき 1 で、そうでないとき 0 と定めたものである。 $G$  を  $X \times X$  の空でないいくつかの部分集合の集まりとする。 $(X, G)$  がアソシエーションスキームであるとは

- (1)  $\sum_{g \in G} \sigma_g$  はすべての成分が 1 の行列。(すなわち  $X \times X = \bigcup_{g \in G} g$  は  $X \times X$  の分割。)
- (2)  $1 := \{(x, x) \mid x \in X\} \in G$  ( $\sigma_1$  は単位行列。)
- (3)  $g \in G$  ならば  $g^* := \{(y, x) \mid (x, y) \in g\} \in G$  ( $\sigma_{g^*}$  は  $\sigma_g$  の転置行列。)
- (4)  $f, g, h \in G$  に対して、ある非負整数  $p_{fg}^h$  があって  $\sigma_f \sigma_g = \sum_{h \in G} p_{fg}^h \sigma_h$ 。

が成り立つこととする。単に  $G$  をアソシエーションスキームともいうことにする。 $g \in G$  に対して  $n_g := p_{gg}^1$  とおいて、これを  $g$  の分岐指数という。任意の  $g \in G$  に対して  $n_g = 1$  であるとき  $(X, G)$  を thin であるという。このとき  $G$  は本質的に有限群とすることができる。

定義より

$$\mathbb{C}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{C}\sigma_g$$

は行列環をなす。これを  $G$  の  $\mathbb{C}$  上の隣接代数という。 $\mathbb{C}$  上の隣接代数は常に半単純であることが知られている。

$S \subset G$  に対して  $\sigma_S := \sum_{g \in S} \sigma_g$ ,  $n_S := \sum_{g \in S} n_g$  とおく。 $S \subset G$  が  $G$  の閉部分集合であるとは  $n_S^{-1} \sigma_S$  が  $\mathbb{C}G$  のべき等元であることとする。また  $S$  が正規閉部分集合であるとは  $n_S^{-1} \sigma_S$  が  $\mathbb{C}G$  の中心的べき等元であることとする。 $G$  の閉部分集合  $H$  に対して剰余スキーム  $(X/H, G//H)$  が定義されるが、定義がやや複雑なため、これは [3] を参照して頂きたい。 $G//H = \{g^H \mid g \in G\}$  と表されることに注意しておく。剰余スキーム  $(X/H, G//H)$  が thin であるとき  $H$  を強正則であるという。強正則ならば正則である。強正則閉部分集合全体の共通部分は、また強正則で、これを thin residue といい  $O^\theta(G)$  と表す。すなわち  $O^\theta(G)$  は剰余スキームが有限群となるような閉部分集合のうち最小のものである。 $G//O^\theta(G)$  は有限群なので、その交換子群  $D(G//O^\theta(G))$  が考えられる。 $D(G//O^\theta(G))$  の  $G$  への逆像を  $D(G)$  と表すことにする。すなわち  $D(G)$  は剰余スキームがアーベル群となるような閉部分集合のうち最小のものである。

ここではアソシエーションスキームの表現とは、その隣接代数  $\mathbb{C}G$  の線形表現のこととする。 $\mathbb{C}G$  は行列環として定義されているので  $\sigma_g \mapsto \sigma_g$  は表現である。これを  $G$  の標準表現といい、その指標を  $\gamma_G$  で表す。 $\gamma_G$  の既約分解を

$$\gamma_G = \sum_{\chi \in \text{Irr}(G)} m_\chi \chi$$

とし  $m_\chi$  を  $\chi$  の重複度という。

$H$  が  $G$  の正規閉部分集合であるとき

$$\pi: \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}(G//H), \quad \sigma_g \mapsto \frac{n_g}{n_{g^H}} \sigma_{g^H}$$

は代数全準同型である [2]。これによって  $G//H$  の既約指標は  $G$  の既約指標と見ることができて、更にその重複度も一致する。

## 2 指標の積

$G$  を有限群とし  $\chi, \varphi$  をその指標とする。有限群の指標に対しては、その積は単に値の積、すなわち  $\chi\varphi(g) = \chi(g)\varphi(g)$  で定義すれば、それはまた指標になる。これは  $\mathbb{C}G$  が、余積  $g \mapsto g \otimes g$  によって Hopf 代数であることによる。

アソシエーションスキーム  $G$  に対しては [1] にあるように、余積を

$$\Delta: CG \rightarrow CG \otimes CG, \quad \sigma_g \mapsto \frac{1}{n_g} \sigma_g \otimes \sigma_g$$

で定めるのが良いと思われるが、これは一般に代数準同型にはならない(よって  $CG$  は Hopf 代数にならない)。しかし、それでもこの余積を採用したとすると、指標の積は

$$\chi\varphi(\sigma_g) := \frac{1}{n_g} \chi(\sigma_g) \varphi(\sigma_g)$$

で定義するのが自然であるといえる。

具体例を見てみると、上のように定義した指標の積は一般に指標とはならないが、一方の指標が特別な場合には指標になることが確認できる。そこで

$$\Delta' := (\pi \otimes 1) \circ \Delta: CG \rightarrow \mathbb{C}(G//O^\theta(G)) \otimes CG, \quad \sigma_g \mapsto \sigma_{gH} \otimes \sigma_g$$

と定めれば  $\Delta'$  は代数準同型となり、次の結果を得る。

**Theorem 2.1.**  $G$  をアソシエーションスキームとする。 $\chi$  を  $G//O^\theta(G)$  の指標とし  $\varphi$  を  $G$  の指標とすると  $\chi\varphi$  は  $G$  の指標である。特に  $\chi \in \text{Irr}(G//D(G))$ ,  $\varphi \in \text{Irr}(G)$  とすると  $\chi\varphi \in \text{Irr}(G)$  であり  $m_\varphi = m_{\chi\varphi}$  が成り立つ。

$G//D(G)$  はアーベル群なので  $\text{Irr}(G//D(G))$  は自然にアーベル群の構造をもつ。この結果より  $\text{Irr}(G//D(G))$  は  $\text{Irr}(G)$  に作用し、同じ軌道に入る既約指標は同じ重複度をもつ。この事実はアソシエーションスキームの指標を計算する際に役に立つと思われる。

Theorem 2.1 を実際に利用するには  $\text{Irr}(G//D(G))$  を特徴付ける必要があるが、これについては次の結果がある。

**Theorem 2.2.**  $\chi \in \text{Irr}(G)$  に対して  $\chi \in \text{Irr}(G//D(G))$  であることと  $m_\chi = 1$  であることは同値である。

次に  $\text{Irr}(G//O^\theta(G))$  の特徴付けも考えたいが、これについては今のところ出来ていない。一般に  $\chi(1) \leq m_\chi$  が成り立ち、 $\chi \in \text{Irr}(G//O^\theta(G))$  ならば  $\chi(1) = m_\chi$  である。この逆、すなわち  $\chi(1) = m_\chi$  ならば  $\chi \in \text{Irr}(G//O^\theta(G))$  が成り立つこと、を予想している。

## References

- [1] Y. Doi, Bi-Frobenius algebras and group-like algebras, preprint.
- [2] A. Hanaki, Representations of association schemes and their factor schemes, *Graphs Comb.*, **19** (2003) 195–201.
- [3] P.-H. Zieschang, *An Algebraic Approach to Association Schemes*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1996.